

Ad-Soyad:

CEVAP ANAHTARI

20.01.2019

Numara:

İmza:

SOYUT MATEMATİK İ BÜTÜNLEME SORULARI

- 1) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \circ y = x + y - 1$, $x * y = x + y - xy$ ikili işlemleri tanımlansın. (\mathbb{Z}, \circ) değişmeli bir grup olmak üzere $(\mathbb{Z}, \circ, *)$ bir halka olur mu? Gösteriniz.
- 2) Bir X kümesi üzerindeki bütün sıralama bağıntılarının kümesi A ile gösterilsin. (A, \subseteq) sıralı bir küme olur mu? Gösteriniz.
- 3) $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ için $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ biçiminde tanımlanan \sim bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz. Eğer \sim denklik bağıntısı ise $(2, 3)$ ' ün denklik sınıfını bulunuz.
- 4) $f: A \rightarrow B$ ve $g: C \rightarrow D$ iki fonksiyon olsun.

$$h: A \times C \rightarrow B \times D$$

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere f ve g bire-bir ve örten fonksiyonlar ise h fonksiyonu bire-bir ve örten olur mu? Gösteriniz.

- 5) a) p, q ve r önerme olmak üzere r önermesinin yanlış olduğu bilindiğine göre

$$(r \Rightarrow r') \Leftrightarrow ((p \vee q)' \wedge p) \vee r'$$

önermesinin doğruluk değeri nedir? Gösteriniz.

- b) $A - B = B' - A'$ olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

1) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$x * (y * z) = (x * y) * z \quad \text{mi?}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x + (y * z) - x(y * z) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$(x * y) * z = (x * y) + z - (x * y)z = x + y + z - yz - xy - xz + xyz \dots \textcircled{2}$$

① ve ② den eşitlik sağlanır.

• $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$$

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) \quad \text{mi?}$$

$$x * (y \circ z) = x * (y + z - 1)$$

$$= x + y + z - 1 - x(y + z - 1)$$

$$= x + y + z - 1 - xy - xz + x \quad \dots \text{①}$$

$$(x * y) \circ (x * z) = (x + y - xy) \circ (x + z - xz)$$

$$= x + y - xy + x + z - xz - 1 \quad \dots \text{②}$$

① ve ② den $*$ işleminin \circ işlemi üzerine soldan dağılım özelliği vardır.

Bunlar şekilde sağdan dağılım özelliği de gösterilir.

$\therefore (\mathbb{Z}, \circ, *)$ bir halkadır.

2) $A = \{ A_i \subseteq X \times X : \forall i \in I \text{ için } A_i, X \text{ de sıralanmış bağ.} \}$

• Yarıma özelliği

$\forall i \in I, A_i \in A$ için $A_i \subseteq A_j$ olduğundan yarıma özelliği vardır.

• Ters simetrik özelliği

$\forall i, j \in I, A_i, A_j \in A$ için

$A_i \subseteq A_j$ ve $A_j \subseteq A_i \Rightarrow A_i = A_j$
olduğundan ters simetri özelliği vardır.

• Geçişme özelliği

$\forall i, j, k \in I, A_i, A_j, A_k \in A$ için

$A_i \subseteq A_j$ ve $A_j \subseteq A_k \Rightarrow A_i \subseteq A_k$

sağlandığından geçişme özelliği vardır.

$\therefore (A, \subseteq)$ sıralı bir kümedir.

3) • Yansımada özelliği

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ için

$(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$

olduğundan yansımada özelliği vardır.

• Simetri özelliği

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ için

$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ mi?

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

$\Leftrightarrow cb = da$

$\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

olduğundan simetri özelliği vardır.

• Geçişme özelliği

$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ için

$$(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f) \text{ mi?}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \\ (c,d) \sim (e,f) \Leftrightarrow cf = de \end{array} \right\} \Rightarrow af = be$$

$$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

oldugundan gewisse ateligi vardır.

$\therefore \sim$ bir denklik bağıntısıdır.

$$\begin{aligned} \bullet \overline{(2,3)} &= \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : (2,3) \sim (a,b) \right\} \\ &= \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : 2b = 3a \right\} \\ &= \left\{ (2,3), (4,6), (6,9), \dots \right\} \end{aligned}$$

4) • h bire-bir mi?

$$\forall (x,y), (z,t) \in A \times C \text{ için}$$

$$h(x,y) = h(z,t) \Rightarrow (x,y) = (z,t) \text{ mi?}$$

$$h(x,y) = h(z,t) \Rightarrow (f(x), g(y)) = (f(z), g(t))$$

$$\Rightarrow f(x) = f(z), g(y) = g(t)$$

$$\xRightarrow[\substack{f \text{ ve } g \\ 1-1}]{\text{}} x = z, y = t$$

$$\Rightarrow (x,y) = (z,t)$$

$\therefore h$ 1-1 dir.

• h örten mi?

$$\forall (b,d) \in B \times D \text{ için } \exists (x,y) \in A \times C \text{ z}$$

$$h(x,y) = (b,d) \text{ olması}$$

$$(b, d) \in B \times D \implies b \in B \vee d \in D$$

$$\begin{aligned} &\implies \exists x \in A \ni f(x) = b \vee \\ &\exists y \in C \ni g(y) = d \end{aligned}$$

$$\implies \exists (x, y) \in A \times C \ni (f(x), g(y)) = (b, d)$$

∴ h ontendm.

$$5) \ a) \ r \equiv 0 \implies r' \equiv 1$$

$$r \implies r' \equiv 0 \implies 1 \equiv 1$$

$$([\neg p \vee q]' \wedge p] \vee r' \equiv ([\neg p \vee q]' \wedge p] \vee 1) \equiv 1$$

$$1 \equiv 1 \equiv 1$$

$$\begin{aligned} b) \ x \in A - B &\iff x \in A \vee x \notin B \\ &\iff x \notin A' \vee x \in B' \\ &\iff x \in B' \vee x \notin A' \\ &\iff x \in B' - A' \end{aligned}$$